

# Messunsicherheitsanalysen

Erstellen von Messunsicherheitsanalysen für Prüfanlagen:

Von der Western European Calibration Corporation (WECC) wurden im DOC. 19 Richtlinien zur Ermittlung der Genauigkeit von Prüfergebnissen aufgestellt. Grundlegende Behandlung erfährt dieses Thema in " Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" , herausgegeben von der ISO Technical Advisory Group on Metrology (TAG 4).

Ein Beispiel für einen Volumenzählerprüfstand:

## Methodik

Es soll hier nur eine kurze Zusammenstellung der verwendeten Elemente gegeben werden.

Ist Y die Menge aller wahrscheinlichen Ergebnisse einer Prüfung, so ist diese Menge durch zwei wesentliche Parameter charakterisiert, den Erwartungswert  $\mu_Y$  und die Streuung oder Varianz  $\sigma_Y^2$ . Der Erwartungswert kann etwa als gewogener Mittelwert aller möglichen Werte aus Y bezeichnet werden. Die Streuung charakterisiert wie eng oder wie weit auseinander die einzelnen Werte aus Y liegen. Die Streuung kann somit ein Maß dafür sein wie groß die Unsicherheit eines Ergebnisses ist.

Y kann von einer Anzahl von Einflussgrößen Xi abhängig sein, nach der Formel

$$Y=G(X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n)$$

Die Größen Xi sind ebenfalls charakterisiert durch ihren Erwartungswert und die Varianz. Sind die Einflussgrößen voneinander unabhängig, so gilt der Zusammenhang

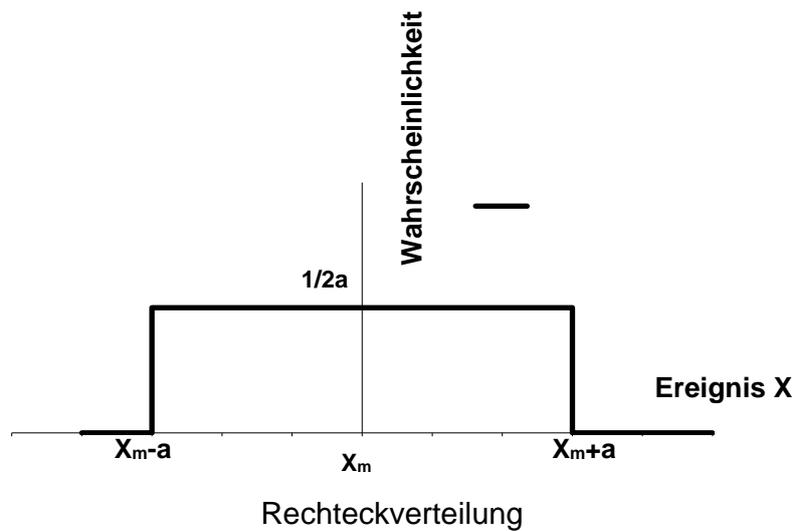
$$S_Y^2 = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial G}{\partial X_i} \right)^2 * S_{X_i}^2$$

Aus der Varianz bzw. der Unsicherheitsbereiche der Einflussgrößen kann somit auf die Unsicherheit des Gesamtergebnisses geschlossen werden. Die Größe der Varianz hängt von der jeweiligen Verteilfunktion der einzelnen Größen ab. Im folgenden werden einige charakteristische Verteilfunktionen die im folgenden zur Anwendung kommen beschrieben.

## Rechteckverteilung

Eine sehr häufig zur Anwendung kommende Verteilung ist die Rechteckverteilung. Wenn Grenzwerte bekannt sind innerhalb derer sich ein Ergebnis befinden wird diese Verteilung angenommen. z.B ein Spannungsmessgerät misst mit  $\pm 20\mu V$  Unsicherheit. Innerhalb dieses Bereiches wird der wahrscheinliche Wert des Messergebnisses liegen. Über eine

Wahrscheinlichkeitsverteilung liegen keine weiteren Information vor. Man nimmt an dass alle Werte gleich wahrscheinlich sind.



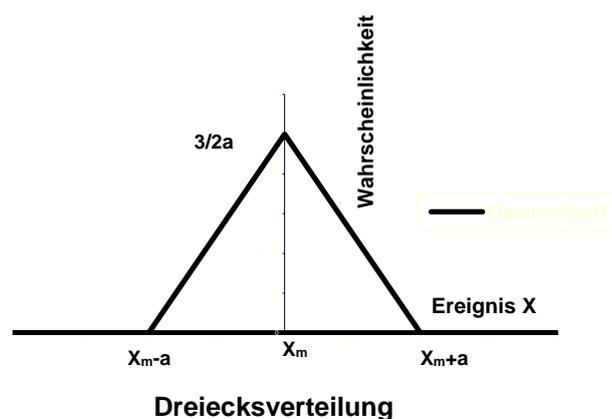
Bei der Rechteckverteilung liegen alle Wert innerhalb eines Intervalls  $\pm a$  um den Mittelwert, wobei die Wahrscheinlichkeit innerhalb dieses Intervalls für jeden Wert gleich groß ist.

Die Varianz ergibt sich dann zu

$$S_x^2 = \frac{a^2}{3}$$

#### Dreieckverteilung

Diese Verteilung ist ähnlich der Rechteckverteilung jedoch ist die Wahrscheinlichkeit größer daß sich die Ereignisse enger um den Erwartungswert gruppieren.

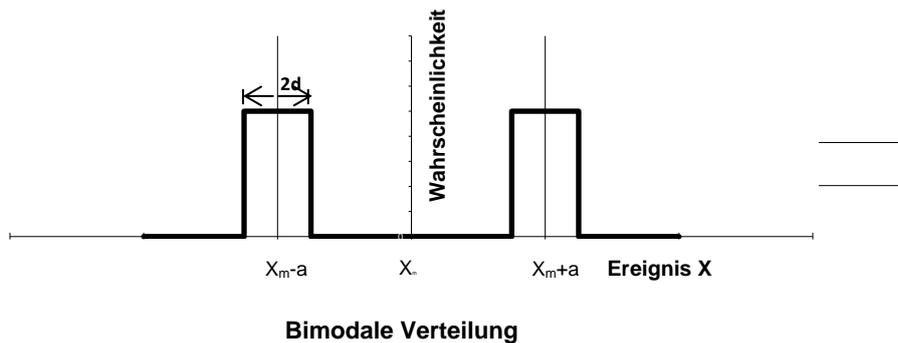


Die Varianz dieser Verteilung ist

$$S_x^2 = \frac{a^2}{6}$$

Bimodale Verteilung:

Bei der bimodalen Verteilung liegen alle Werte von X in einem engen Bereich  $2\delta$  im Abstand  $\pm a$  vom angenommenen Erwartungswert. Diese Verteilung kann z.B. verwendet werden wenn eine systematische Abweichung vermutet wird, die jedoch nicht korrigiert wird.

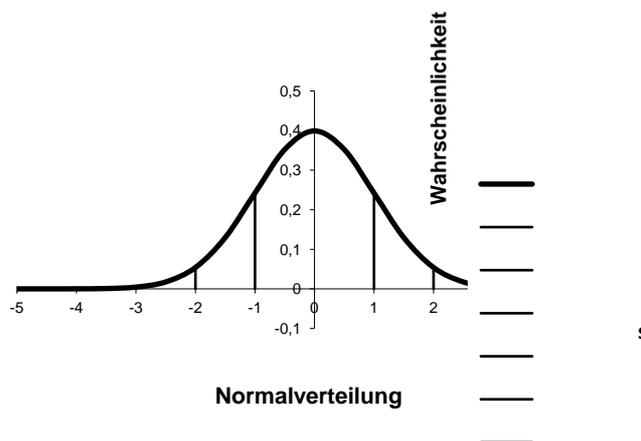


Die Varianz ergibt sich dabei zu:

$$S_x^2 = a^2 + \frac{\delta^2}{3}$$

Normalverteilung:

Werden mehrere Verteilungen gleich welcher Art überlagert so ist das Ergebnis meist mit guter Annäherung normalverteilt.



Die Varianz ergibt sich zu:

$$S_x^2 = \sigma^2$$

## Aufbau der Messwertgleichung

### Einflussfaktoren:

- a) Auflösung des Prüflingsergebnisses
- b) Auflösung der Referenzzählung
- c) Stabilität der Mastermeter
- d) Temperaturunterschied zwischen Mastermeter und Prüfling
- e) Temperaturänderungen im Rohrsystem
- f) Luft im Prüfsystem
- g) Messunsicherheit der Waage
- h) Einfluss der Umschaltvorrichtung
- i) Einfluss der Auftriebs und Feuchtekorrektur
- j) Einfluss der Dichtebestimmung

### Messwertgleichung.

Das Ergebnis einer Prüfung ist ein Volumenfehler des Prüflings. Dieser ist definiert durch:

$$F = \left( \frac{V_{\text{ist}}}{V_{\text{soll}}} - 1 \right)$$

sowohl  $V_{\text{ist}}$  als auch  $V_{\text{soll}}$

haben einen Unsicherheitsbeitrag.

Die Varianz von F ergibt sich nun zu:

$$S_F^2 = \left( \frac{\partial F}{\partial V_{\text{ist}}} \right)^2 * S_{V_{\text{ist}}}^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial V_{\text{soll}}} \right)^2 * S_{V_{\text{soll}}}^2$$

$$S_F^2 = \left( \frac{1}{V_{\text{soll}}} \right)^2 * S_{V_{\text{ist}}}^2 + \left( \frac{V_{\text{ist}}}{V_{\text{soll}}^2} \right)^2 * S_{V_{\text{soll}}}^2$$

Einfluss des Istvolumen (Prüflingsergebnis):

Ein Prüflingsergebnis kann im allgemeinen dargestellt werden:

$$V_{\text{ist}} = n_P * a_P$$

$n_P$  .....Anzahl der Grundeinheiten (z.B. Impulse, Teilstriche)

$a_P$  .....Auflösung (Grundeinheit) des Ergebnisses

Die Auflösung ist eine feststehende Größe ohne Unsicherheitsbereich, die Anzahl hat dagegen einen Unsicherheitsbereich z. B. Digitalisierungsschritte, Ableseunsicherheiten.

Die Varianz ergibt sich demnach:

$$S_{V_{\text{ist}}}^2 = a_p^2 * S_{n_p}^2$$

**Einfluss des Sollvolumens:**

Das Sollvolumen ist das Ergebnis des Masterzähler, der mit einer Korrektur der verschiedenen Einflussfaktoren versehen werden kann.

$$V_{\text{soll}} = (n_{mP} * a_m * K_m) * \frac{\rho_{\text{Ref}}}{\rho_{\text{Prf}}} + \Delta V_R + \Delta V_L$$

- $a_m$  .....Auflösung des Mastermeters
- $n_{mP}$  .....Anzahl der Mastermetereinheiten in Bezug zum Prüfling
- $K_m$  .....Korrekturfaktor des Mastermeters ( aus der Kalibrierung)
- $\rho_{\text{Ref}}$  ..... Dichte des Wassers an der Stelle des Referenzzählers
- $\rho_{\text{Prf}}$  ..... Dichte des Wassers an der Stelle des Prüflings
- $\Delta V_R$  .....Einfluss zufolge von Temperaturänderungen des Rohrsystems zwischen Prüfling und Referenz
- $\Delta V_L$  .....Einfluss zufolge Luft im System

Da man die Korrekturen  $\Delta V$  nicht kennt werden diese mit 0 angenommen, sie haben jedoch einen Unsicherheitsbereich der abgeschätzt werden kann.  
 Beim Mastermeter kann die Auflösung ( Impulswertigkeit) verwendet werden um die Stabilität bzw. das Driftverhalten über Zeit und Temperatur zu beurteilen.

Die Varianz ermittelt sich zu:

$$S_{V_{\text{soll}}}^2 = \left( a_m * K_m * \frac{\rho_{\text{Ref}}}{\rho_{\text{Prf}}} \right)^2 * S_{n_{mP}}^2 + \left( n_{mP} * K_m * \frac{\rho_{\text{Ref}}}{\rho_{\text{Prf}}} \right)^2 * S_{a_m}^2 + \left( n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{\text{Ref}}}{\rho_{\text{Prf}}} \right)^2 * S_{K_m}^2 +$$

$$+ (n_{mP} * a_m + K_m)^2 * S_{\frac{\rho_{\text{Ref}}}{\rho_{\text{Prf}}}}^2 + S_{\Delta V_R}^2 + S_{\Delta V_L}^2$$

Der Korrekturfaktor  $K_m$  wird durch eine Kalibrierung der Mastermeter mit einer Primärreferenz ( Waage) bestimmt.

$$K_m = \frac{V_{\text{Ref}}}{V_m}$$

- $V_{\text{Ref}}$  ..... Referenzvolumen
- $V_m$  .....Ergebnis des Mastermeters in bezug auf das Referenzvolumen (Waage)

$$V_{\text{Ref}} = G_W * f_T * \rho_{\text{Ref}} + \Delta V_U + \Delta V_{RR}$$

- $G_W$  ..... konventioneller Wägewert
- $f_T$  ..... Verdunstungs- und Auftriebskorrektur
- $\rho_{\text{Ref}}$  ..... Dichte des Wassers an der Stelle des Referenzzählers

$\Delta V_U$  ..... Einfluss der Umschaltvorrichtung  
 $\Delta V_{RR}$  ..... Einfluss zufolge Temperaturänderungen im Rohrsystem zwischen  
 Mastermeter  
 und Referenz (Waage)

Das Ergebnis des Mastermeters kann wieder dargestellt werden durch:

$$V_m = n_{mR} * a_m$$

$n_{mR}$  ..... Anzahl der Mastermetereinheiten in bezug auf das Referenzvolumen  
 $a_m$  ..... Auflösung des Mastermeters

$$K_m = \frac{G_W * f_T}{n_{mR} * a_m * \rho_{Ref}} + \frac{\Delta V_U}{V_m} + \frac{\Delta V_{RR}}{V_m}$$

Die Varianz des Korrekturfaktors ergibt sich dann

$$S_{K_m}^2 = \left( \frac{-V_{Ref}}{V_m^2} \right)^2 * a_m^2 * S_{n_{mR}}^2 + \left( \frac{f_T}{V_m * \rho_{Ref}} \right)^2 * S_{G_W}^2 + \left( \frac{G_W}{V_m * \rho_{Ref}} \right)^2 * S_{f_T}^2 + \left( \frac{G_W * f_T}{V_m * \rho_{Ref}^2} \right)^2 * S_{\rho_{Ref}}^2 +$$

$$+ \left( \frac{1}{V_m} \right)^2 * S_{\Delta V_U}^2 + \left( \frac{1}{V_m} \right)^2 * S_{\Delta V_{RR}}^2$$

Zur Vereinfachung kann angenommen werden dass dem Werte nach gilt

$$V_{soll} \approx V_{ist} = V_P$$

$$V_m \approx V_{Ref}$$

$V_P$  .....Volumen mit dem der Prüfling geprüft wird

$V_{Ref}$ ..... Volumen mit dem der Referenzzähler geprüft wird

$$S_F^2 = \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * a_P^2 * S_{n_P}^2 + \dots\dots\dots\text{Prüfling}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(a_m * K_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * S_{n_{mP}}^2 \dots\dots\dots\text{Anzahl der Mastermetereinheiten}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * K_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * S_{a_m}^2 \dots\dots\dots\text{Auflösung des Mastermeters}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * (n_{mP} * a_m * K_m)^2 * S_{\frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}}^2 \dots\dots\dots\text{Dichtekorrektur}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * S_{\Delta V_R}^2 \dots\dots\dots\text{Temperaturänderung des Rohrsystems}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * S_{\Delta V_L}^2 \dots\dots\dots\text{Luft im System}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{1}{V_{Ref}}\right)^2 * a_m^2 * S_{n_{mR}}^2 \dots\dots\dots\text{Anzahl der Mastermetereinheiten}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{f_T}{V_{Ref} * \rho_{Ref}}\right)^2 * S_{G_W}^2 \dots\dots\dots\text{..Unsicherheit der Waage}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{G_W}{V_{Ref} * \rho_{Ref}}\right)^2 * S_{f_T}^2 \dots\dots\dots\text{...Verdunstungs- und}$$

**Auftriebskorrektur**

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{G_W * f_T}{V_{Ref} * \rho_{Ref}^2}\right)^2 * S_{\rho_{Ref}}^2 \dots\dots\dots\text{..... Dichtemessung}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{1}{V_{Ref}}\right)^2 * S_{\Delta V_U}^2 \dots\dots\dots\text{.....Umschaltvorrichtung}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{1}{V_{Ref}}\right)^2 * S_{\Delta V_{RR}}^2 \dots\dots\dots\text{..... Temperaturänderung des Rohrsystems bei der Referenzzählerprüfung}$$

$$+ \left(\frac{1}{V_P}\right)^2 * \left(n_{mP} * a_m * \frac{\rho_{Ref}}{\rho_{Prf}}\right)^2 * \left(\frac{1}{V_{Ref}}\right)^2 * S_{\Delta V_{LR}}^2 \dots\dots\dots\text{..... Luft im System bei der Referenzzählerprüfung}$$

Kontaktieren Sie mich über das Kontaktformular, telefonisch unter +43 664 / 620 76 74 oder gerne per Mail an [office@a-witt.at](mailto:office@a-witt.at).

Ich freue mich auf Ihre Kontaktaufnahme,  
*Ihr Dipl. Ing. Alfons Witt, Ingenieurbüro für Maschinenbau*

**Maschinenbau-Mechatronik mit Schwerpunkt Prüfanlagen-Bau in 1100 Wien**